



## Ordre préfixe et temps d'arrêt

Samy Abbes

### ► To cite this version:

| Samy Abbes. Ordre préfixe et temps d'arrêt. 2009. hal-00355969v2

**HAL Id: hal-00355969**

**<https://hal.science/hal-00355969v2>**

Preprint submitted on 30 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Ordre préfixe et temps d'arrêt

Samy Abbes

Janvier 2009

## Résumé

On formalise la notion de temps d'arrêt pour des processus à temps discret en utilisant la notion d'ordre préfixe sur les mots finis ou infinis sur un alphabet donné. On aboutit à une formulation d'où est absente l'indice de temps, ce qui se prête bien à des généralisations pour des processus avec parallélisme. On applique ce formalisme pour décrire deux propriétés des temps d'atteinte, l'une portant sur une caractérisation des temps d'atteinte, l'autre sur le conditionnement de chaînes de Markov.

## 1 Introduction

La notion de temps d'arrêt, introduite par Doob [2], est fondamentale en théorie des processus stochastiques. Dans cette note, on donne une caractérisation des temps d'arrêt associés à un processus  $X = (X_n)_{n \geq 1}$  à valeurs dans un ensemble d'états fini ou dénombrable  $S$ , qui se formule en termes d'ordres partiels de la façon suivante. L'espace canonique  $\Omega$  des trajectoires du processus  $X$  est l'espace des suites infinies, ou mots infinis  $\Omega = S^{\mathbb{N}^*}$ , muni de la filtration canonique  $(\mathfrak{F}_n)_{n \geq 1}$ , où  $\mathfrak{F}_n$  est pour chaque entier  $n \geq 1$  la tribu engendrée  $\mathfrak{F}_n = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ . Il apparaît avantageux, et c'est le sujet de cette note, de considérer également l'ensemble des mots finis sur  $S$  pour traiter du problème des temps d'arrêt.

L'ordre préfixe ' $\leq$ ' est un ordre partiel sur l'ensemble des mots finis :  $x \leq y$  si le mot  $y$  commence par le mot  $x$ . L'ordre préfixe s'étend naturellement à l'ensemble  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Omega$  des mots finis ou infinis, dont  $\Omega$  forme alors l'ensemble des éléments maximaux.

Notons  $\bar{\mathbb{N}}$  pour l'ensemble constitué de  $\mathbb{N}$  et d'un élément infini  $\infty$ . À toute fonction  $T : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ , on associe une fonction  $V_T : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$  ainsi définie, pour tout point  $\omega \in \Omega$  : si  $T(\omega) < \infty$ , alors  $V_T(\omega)$  est le sous-mot préfixe de  $\omega$  de longueur  $T(\omega)$ , et  $V_T(\omega) = \omega$  si  $T(\omega) = \infty$ . On a donc toujours  $V_T(\omega) \leq \omega$ . Réciproquement, si  $V : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$  est une fonction qui vérifie  $V(\omega) \leq \omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , on considère la fonction  $T_V : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ , définie par  $T_V(\omega) = |V(\omega)|$ , où  $|x|$  désigne la longueur finie ou infinie du mot  $x \in \bar{\Gamma}$ .

Nous remarquons que la propriété de temps d'arrêt, qui porte sur une fonction  $T : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ , se traduit ainsi :  $T$  est un temps d'arrêt pour la filtration

naturelle  $(\mathfrak{F}_n)_{n \geq 1}$  si et seulement si  $V_T$  vérifie la propriété

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad (V_T(\omega) \leq \omega') \Rightarrow (V_T(\omega') = V_T(\omega)). \quad (1)$$

Notre contribution consiste donc à donner une caractérisation des temps d'arrêt uniquement à l'aide de l'ordre préfixe. En particulier, l'indice de temps a disparu dans la formulation (1). C'est pourquoi cette formulation se prête bien à des généralisations qui sont évoquées dans la section 5.

On donne deux applications de ce formalisme qui concernent les temps d'atteinte. On caractérise les temps d'atteinte par une propriété intrinsèque parmi les temps d'arrêt, c'est-à-dire, qu'on peut dire si un temps d'arrêt  $\tau$  correspond au temps d'atteinte  $\tau_A$  d'une partie de l'espace d'états, sans référence explicite à la partie  $A$ . Enfin, on s'intéresse au conditionnement d'une chaîne de Markov relativement à la position de la chaîne au moment de son entrée dans une partie donnée à l'avance ; on montre que le processus conditionnel obtenu ainsi est markovien homogène, ce qui n'est pas le cas si la même construction est opérée par rapport à des temps d'arrêt quelconques, et non plus des temps d'atteinte.

L'article est organisé de la façon suivante. Nous fixons les notations à la section 2. La caractérisation des temps d'arrêt est donnée à la section 3. Les deux applications sont présentées à la section 4. Enfin, la section 5 discute motivations et perspectives.

## 2 Rappels et notations

### 2.1 Cadre général

On se donne un ensemble fini ou dénombrable  $S$ , et on note  $\Omega$  l'espace des suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  à valeurs dans  $S$ , muni de la tribu produit  $\mathfrak{F}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $X_n : \Omega \rightarrow S$  la  $n^{\text{e}}$  projection canonique, et on considère la sous-tribu  $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}$  engendrée par les  $n$  applications  $X_1, \dots, X_n$ . On appelle *filtration canonique* la filtration  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$ , à laquelle on rajoute la tribu triviale  $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

### 2.2 Temps d'arrêt

On considérera toujours des temps d'arrêt relatifs à la filtration canonique, et on les appellera simplement *temps d'arrêt*. On note  $\overline{\mathbb{N}}$  l'ensemble  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . La définition rappelée ci-dessous de temps d'arrêt diffère légèrement de la définition habituelle, car la valeur 0 est permise, alors que l'ensemble d'indices parcourt  $\mathbb{N}^*$ . Cet ajout sera justifié plus loin.

**Définition 1.** On appelle temps d'arrêt toute application  $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{\tau = n\} \in \mathfrak{F}_n. \quad (2)$$

Remarquons qu'un temps d'arrêt est nécessairement une application mesurable. Le premier exemple de temps d'arrêt est donné par les temps constants, c'est-à-dire les applications  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  identiquement égales à une valeur donnée. Un exemple de temps d'arrêt non constant est donné par les *temps d'atteinte*, qui sont définis comme suit.

**Définition 2.** Soit  $A$  une partie non vide de  $S$ . On appelle temps d'atteinte de  $A$  l'application  $\tau_A : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$  définie par :

$$\tau((x_n)_{n \geq 1}) = \inf\{n \geq 1 : x_n \in A\}, \quad (3)$$

où on convient que l'infimum de l'ensemble vide vaut  $\infty$ .

### 2.3 Ordre préfixe

On note  $\Gamma$  l'ensemble des *mots finis* sur l'alphabet  $S$ , c'est-à-dire, l'ensemble des suites finies d'éléments de  $S$ . La *longueur* d'un mot  $x$  est notée  $|x|$ . La *concaténation*, notée  $x \cdot y$  pour deux mots finis  $x, y \in \Gamma$ , définit une loi associative sur  $\Gamma$ , dont le mot vide noté  $\emptyset$  est l'élément neutre. Nous avons  $|x \cdot y| = |x| + |y|$  pour tous  $x, y \in \Gamma$ .

On dit qu'un mot  $x \in \Gamma$  est un *préfixe* d'un mot  $y \in \Gamma$  s'il existe un mot  $z \in \Gamma$  tel que  $y = x \cdot z$ . Dans le langage des monoïdes, un préfixe est donc un diviseur à gauche. La relation binaire ' $\leq$ ' définie sur  $\Gamma$  par :

$$\forall x, y \in \Gamma, \quad x \leq y \iff x \text{ est un préfixe de } y,$$

est clairement réflexive et transitive. Elle est également antisymétrique, ce qui se voit par des considérations de longueur des mots. C'est donc un ordre partiel sur  $\Gamma$ , appelé *ordre préfixe*.

Définissons  $\overline{\Gamma}$  comme l'ensemble des mots finis ou infinis,  $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Omega$ . La *longueur*  $|x|$  d'un élément  $x \in \Omega$  est définie comme  $\infty$ . Le monoïde  $\Gamma$  agit à gauche par concaténation sur  $\overline{\Gamma}$ , de sorte que  $x \cdot y$  est bien défini pour tout  $x \in \Gamma$  et tout  $y \in \overline{\Gamma}$ . Cette opération définie sur  $\Gamma \times \overline{\Gamma}$  étend la concaténation des mots finis, définie sur  $\Gamma \times \Gamma$ . On définit l'ordre préfixe ' $\leq$ ' sur  $\overline{\Gamma}$  de la façon suivante, qui étend la définition de l'ordre préfixe sur  $\Gamma$  :

$$\forall x, y \in \overline{\Gamma}, \quad x \leq y \iff \begin{cases} |x| = \infty, & \text{et } x = y, \\ \text{ou } |x| < \infty, & \text{et } \exists z \in \overline{\Gamma} : y = x \cdot z. \end{cases}$$

## 3 Une caractérisation des temps d'arrêt par l'ordre préfixe

Ainsi que la terminologie le suggère, un temps d'arrêt est surtout conçu pour préciser un moment aléatoire où s'arrêter ; arrêter un processus  $X = (X_n)_{n \geq 1}$  au temps  $\tau$ , c'est donc considérer la variable  $X_\tau$ , ou le processus arrêté  $X_1 \dots X_\tau$ . On interprète cette remarque par la définition suivante.

**Définition 3.** On appelle temps concret toute fonction  $V : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$ , des mots infinis dans l'ensemble des mots finis ou infinis sur  $S$ , vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad V(\omega) \leq \omega. \quad (4)$$

Les temps concrets sont ordonnés ponctuellement, c'est-à-dire que deux temps concrets  $V, W : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$  vérifient  $V \leq W$  si et seulement si  $V(\omega) \leq W(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

On relie les temps concrets et les fonctions à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}}$  de la façon suivante :

**Définition 4.** À toute fonction  $T : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$ , on associe le temps concret  $V_T$  défini ainsi : pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $V_T(\omega)$  est l'unique préfixe de  $\omega$  de longueur  $T(\omega)$ . À tout temps concret  $V : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$ , on associe la fonction  $T_V : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$  définie par  $T_V(\omega) = |V(\omega)|$ .

Il s'ensuit immédiatement que l'on a, pour tout fonction  $T : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$  et pour tout temps concret  $V : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$  :

$$T_{V_T} = T, \quad V_{T_V} = V. \quad (5)$$

Il est alors naturel de caractériser un temps d'arrêt  $\tau : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$  par une propriété du temps concret associé  $V_\tau$ . C'est le sujet de la proposition 1 ci-dessous.

**Définition 5.** Soit  $V : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$  un temps concret. On dit que  $V$  est un temps d'arrêt si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \quad V(\omega') \leq \omega \Rightarrow V(\omega) = V(\omega'). \quad (6)$$

Le terme « temps d'arrêt » est donc utilisé pour deux types objets différents, dans les définitions 1 et 5. Le contexte permettra toujours de différencier de quelle définition il s'agit. L'utilisation du même terme est justifiée car les deux notions coïncident, aux transformations de la définition 4 près.

**Proposition 1.** Soit  $\tau : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$  une fonction quelconque. Alors  $\tau$  est un temps d'arrêt si et seulement si  $V_\tau$  est un temps d'arrêt.

De même, soit  $V : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$  un temps concret quelconque. Alors  $V$  est un temps d'arrêt si et seulement si  $T_V$  est un temps d'arrêt.

*Démonstration.* Soit  $\tau$  un temps d'arrêt au sens de la définition 1, soit  $V_\tau$  le temps concret associé, et soit  $\omega, \omega'$  deux éléments de  $\Omega$  tels que  $V_\tau(\omega') \leq \omega$ . Soit  $n = |V_\tau(\omega')|$ . Supposons d'abord que  $n < \infty$ . Soit  $R$  l'application  $R : \Omega \rightarrow \Gamma$  qui associe à tout  $\xi \in \Omega$  le préfixe de  $\xi$  de longueur  $n$ . Alors, puisque  $\{\tau = n\}$  est  $\mathfrak{F}_n$ -mesurable, il est de la forme

$$\{\tau = n\} = R^{-1}(A),$$

où  $A$  est une partie de l'ensemble des mots de longueur  $n$ . Or, puisque  $V_\tau(\omega') \leq \omega$ , nous avons  $R(\omega) = R(\omega') = V_\tau(\omega')$ . Comme  $\omega' \in R^{-1}(A)$ , il s'ensuit que

$\omega \in R^{-1}(A)$ , et donc  $\tau(\omega) = n$ . Or le préfixe de longueur  $n$  de  $\omega$  est  $V_\tau(\omega')$ , donc  $V_\tau(\omega) = V_\tau(\omega')$ , ce qui montre que  $\omega$  et  $\omega'$  satisfont la conclusion de l'implication dans (6).

Supposons maintenant que  $n = \infty$ . Alors  $V_\tau(\omega') = \omega'$  puisque  $V_\tau(\omega') \leq \omega'$  par définition d'un temps concret, et on a également  $\omega = V_\tau(\omega')$  qui suit de  $V_\tau(\omega') \leq \omega$ . Ainsi  $\omega = \omega'$  et la conclusion de (6) est satisfaite. On a donc montré que  $V_\tau$  est un temps d'arrêt au sens de la définition 5.

Réciproquement, supposons que  $V_\tau$  est un temps d'arrêt au sens de la définition 5. Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier, et considérons l'application  $R : \Omega \rightarrow \Gamma$  qui à un mot infini associe son préfixe de longueur  $n$ . La propriété (6) montre que la partie  $\{\tau = n\}$  est saturée par rapport à la relation d'équivalence induite par  $R$  (c'est-à-dire, deux éléments  $\omega, \omega' \in \Omega$  sont  $R$ -équivalents si et seulement si  $R(\omega) = R(\omega')$ ), ce qui implique que  $\{\tau = n\}$  est bien  $\mathfrak{F}_n$ -mesurable. Donc  $\tau$  est un temps d'arrêt au sens de la définition 1.

La deuxième partie de la proposition se déduit de la première, et des égalités (5).  $\square$

## 4 Deux applications aux temps d'atteinte

### 4.1 Une caractérisation des temps d'atteinte

Nous avons rappelé la définition des temps d'atteinte  $\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$  à la définition 2. Comme pour les temps d'arrêt, on appellera aussi *temps d'atteinte* relatif à une partie non vide  $A \subseteq S$ , et on notera  $V_A$ , le temps d'arrêt  $V_{\tau_A} : \Omega \rightarrow \overline{\Gamma}$ , où  $\tau_A$  est donné par la définition 2. Par convention, si  $A$  est la partie vide, on définit  $V_A(\omega) = \omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Cette convention est naturelle si on remarque que l'application  $A \rightarrow V_A$  est décroissante sur les parties non vides de  $S$ .

Nous allons donner un critère qui caractérise les temps d'atteinte parmi les temps d'arrêt quelconques. Pour cela, on introduit d'abord la notion suivante, toujours dans le cadre et avec les notations de la section 2.

**Définition 6.** Soit  $V : \Omega \rightarrow \overline{\Gamma}$  un temps d'arrêt, et soit  $v \in \Gamma$  un mot fini. Nous dirons que  $v$  est  $V$ -défini s'il existe un mot infini  $\omega \in \Omega$  tel que :

$$V(\omega) \leq v \leq \omega.$$

Deux remarques :

1. La proposition 1 montre que, si  $v$  est  $V$ -défini, alors  $V(\xi) = V(\omega) \leq v$  pour tous  $\omega, \xi \in \Omega$  tels que  $v \leq \xi$  et  $v \leq \omega$ .
2. En particulier, si le mot vide  $\emptyset$  est  $V$ -défini, alors  $V$  est constant  $V = \emptyset$ . Un temps d'arrêt  $V$  prend donc toujours ou jamais la valeur  $\emptyset$ . Dans ce dernier cas, nous dirons que le temps d'arrêt  $V$  est *non vide*.

La proposition suivante montre que les temps d'atteinte, parmi les temps d'arrêt, sont caractérisés par une propriété d'invariance vis-à-vis du décalage.

**Proposition 2.** Soit  $V : \Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$  un temps d'arrêt non vide. Alors  $V$  est le temps d'atteinte d'une certaine partie  $A \subseteq S$  si et seulement si, pour tout mot fini  $v \in \Gamma$ , la propriété suivante est satisfaite :

$$\text{si } v \text{ n'est pas } V\text{-défini, alors : } \forall \omega \in \Omega, \quad V(v \cdot \omega) = v \cdot V(\omega). \quad (7)$$

*Démonstration.* Supposons que  $V = V_A$  soit le temps d'atteinte d'une partie  $A \subseteq S$ , et soit  $v \in \Gamma$  un mot fini qui n'est pas  $V$ -défini. Alors  $v$  ne contient parmi les lettres qui le composent aucun élément de  $A$ ; sinon n'importe quel mot infini  $\omega \in \Omega$  satisfaisant  $v \leq \omega$  vérifierait  $V(\omega) \leq v$ , contredisant que  $v$  n'est pas  $V$ -défini. Il est alors clair que pour tout mot infini  $\omega \in \Omega$ , l'équation de (7) est bien satisfaite, éventuellement avec des mots infinis dans chacun des deux membres.

Réciproquement, soit  $V$  un temps d'arrêt non vide satisfaisant la propriété (7). En identifiant les éléments de l'alphabet  $S$  avec les mots de longueur 1, on considère le sous-ensemble  $A \subseteq S$  suivant :

$$A = \{x \in S : x \text{ est } V\text{-défini}\}.$$

On pose  $W = V_A$ , temps d'atteinte de  $A$ , et on va montrer que  $V = W$ . On montre d'abord que  $W \leq V$ . Soit  $\omega \in \Omega$  un mot infini; on suppose que  $V(\omega)$  est un mot fini, sinon il n'y a rien à démontrer. On pose  $v = V(\omega)$ . Alors  $v$  n'est pas vide, soit  $x \in S$  la dernière lettre de  $v$ , et considérons le mot  $v'$  éventuellement vide défini comme  $v$  privé de sa dernière lettre. Alors  $v'$  n'est pas  $V$ -défini, sinon, d'après la remarque 1 qui suit la définition 6, nous aurions d'une part  $V(\omega) \leq v'$  et d'autre part  $V(\omega) = v = v' \cdot x$ , d'où une contradiction. Nous écrivons  $\omega = v' \cdot (x \cdot (\omega - v))$ , où  $\omega - v$  est défini comme le mot infini  $\omega$  dont on a supprimé le préfixe  $v$ , et nous appliquons (7) pour obtenir :

$$v = V(\omega) = v' \cdot V(x \cdot (\omega - v)).$$

On en déduit  $V(x \cdot (\omega - v)) = x$ , donc que  $x$  est  $V$ -défini, et donc  $x \in A$ . En particulier,  $A \neq \emptyset$ . De là, il suit que  $W(\omega) \leq V(\omega)$ . Nous avons donc montré que  $W \leq V$ .

On conclut maintenant de cette façon. Soit  $\omega \in \Omega$ , nous voulons montrer que  $V(\omega) = W(\omega)$ , et puisque nous savons déjà que  $W(\omega) \leq V(\omega)$ , on peut supposer que  $W(\omega)$  est un mot fini. Posons  $w = W(\omega)$ , qui est un mot non vide, soit  $y$  la dernière lettre de  $w$ , et soit  $w'$  le mot défini comme  $w$  privé de sa dernière lettre. Nous avons  $w \leq V(\omega)$ , donc  $w'$  n'est pas  $V$ -défini, car sinon on aurait  $V(\omega) \leq w'$ , d'après la remarque 1 suivant la définition 6, d'où une contradiction. Nous pouvons donc appliquer (7) à la décomposition  $\omega = w' \cdot (\omega - w')$  pour obtenir :

$$V(\omega) = w' \cdot V(\omega - w').$$

Or  $\omega - w'$  commence par la lettre  $y$ , et  $y \in A$ , donc  $V(\omega - w') = y$ . Il s'ensuit que  $V(\omega) = w' \cdot y = w = W(\omega)$ , ce qu'on voulait démontrer.  $\square$

On peut reformuler la proposition précédente pour les temps d'arrêt  $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$  de la façon suivante : si  $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$  est un temps d'arrêt, alors un mot fini  $v \in \Gamma$  est dit  $\tau$ -défini s'il existe un mot infini  $\omega \in \Omega$  tel que  $v \leq \omega$ , et  $\tau(\omega) \leq |v|$ . Un temps d'arrêt  $\tau$  est un temps d'atteinte si et seulement si  $\tau$  vérifie, pour tout mot fini  $v \in \Gamma$  :

$$\text{si } v \text{ n'est pas } \tau\text{-défini, alors : } \forall \omega \in \Omega, \quad \tau(v \cdot \omega) = |v| + \tau(\omega).$$

## 4.2 Conditionnement d'une chaîne de Markov

**Formulation du problème.** Nous allons maintenant appliquer le formalisme introduit ci-dessus aux chaînes de Markov. Nous considérons la famille  $\mathbb{P}_\mu$  de probabilités sur  $(\Omega, \mathfrak{F})$ , définies par une chaîne de Markov sur  $S$  avec distribution initiale  $\mu$  sur  $S$ . Pour tout mot fini ou infini  $v \in \overline{\Gamma}$ , on note  $\uparrow v$  la partie  $\mathfrak{F}$ -mesurable de  $\Omega$  définie par

$$\uparrow v = \{\omega \in \Omega : v \leq \omega\}.$$

Considérons deux parties non vides  $A$  et  $B$  de  $S$ , avec  $B \subseteq A$ . On s'intéresse au processus défini à partir de la chaîne de Markov initiale en l'arrêtant d'une part dès que l'ensemble  $A$  est atteint, et d'autre part en demandant que la partie de  $A$  qui est atteinte soit  $B$ . Autrement dit, on conditionne la chaîne de Markov arrêtée au temps  $\tau_A$  par la contrainte  $\{X_{\tau_A} \in B\}$ .

**Proposition 3.** *Soit  $A$  une partie non vide de  $S$ , et soit  $B$  une partie non vide de  $A$ . On note  $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{N}}$  le temps d'atteinte de  $A$ . Soit  $\mu$  une distribution de probabilité sur  $S$ . On suppose que  $\tau < \infty$ ,  $\mathbb{P}_\mu$ -presque sûrement, et que  $\mathbb{P}_\mu(\tau_B < \infty) > 0$ .*

*Alors le processus arrêté  $X_1 \dots X_\tau$ , muni de la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_\mu(\cdot | X_\tau \in B)$ , est une chaîne de Markov arrêtée homogène.*

*Démonstration.* On note simplement  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\mu$ . Considérons l'arbre des chemins de la chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 1}$ . Conditionner par rapport à l'événement  $\{X_\tau \in B\}$  revient à effectuer les opérations suivantes :

1. Couper les chemins dès qu'ils atteignent  $A$ ;
2. Éliminer les chemins maximaux s'ils ne satisfont pas  $\{X_\tau \in B\}$ . Les chemins maximaux restants seront appelés *chemins maximaux admissibles*, leurs sous-chemins des *chemins admissibles*.
3. Les chemins maximaux admissibles  $w$  sont tous des mots finis; il leur est donnée individuellement une nouvelle probabilité, qui est égale à leur probabilité de départ  $\mathbb{P}(\uparrow w)$  divisée par la constante de renormalisation  $\alpha = \mathbb{P}(X_\tau \in B) > 0$ .

Soit  $\mathbb{Q}$  la nouvelle probabilité ainsi définie sur les chemins maximaux admissibles. Nous allons montrer que  $\mathbb{Q}$  est markovienne et homogène. Soit  $v = y_1 \dots y_p x$  un chemin admissible, avec  $p \geq 0$ , et  $x \in S$  la dernière lettre de  $v$ . Considérons alors n'importe quel mot  $z$  tel que la concaténation  $v \cdot z$  forme



un chemin maximal admissible. Alors, pour tout autre chemin admissible  $v' = y'_1 \dots y'_{p'} x$  avec  $p' \geq 0$ , et même dernière lettre  $x \in S$  que  $v$ , il est clair que  $v' \cdot z$  est également un chemin maximal admissible, puisqu'il ne possède pas d'autre élément de  $A$  que sa dernière lettre, laquelle appartient à  $B$ . Les probabilités respectives de  $v \cdot z$  et de  $v' \cdot z$  sont données par :

$$\mathbb{Q}(v \cdot z) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{P}(\uparrow (v \cdot z)), \quad \mathbb{Q}(v' \cdot z) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{P}(\uparrow (v' \cdot z)). \quad (8)$$

Il nous faut comparer les deux probabilités conditionnelles  $\mathbb{Q}(v \cdot z \mid \uparrow v)$  et  $\mathbb{Q}(v' \cdot z \mid \uparrow v')$ , où cette fois  $\uparrow v$  désigne l'ensemble des chemins maximaux admissibles dont  $v$  est préfixe, et de même pour  $\uparrow v'$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\uparrow v) &= \frac{1}{\alpha} \mathbb{P}(\omega \geq v, X_{\tau_A}(\omega) \in B) \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathbb{P}(\uparrow v) \mathbb{P}_x(X_{\tau_A} \in B), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}_x$  désigne la probabilité  $\mathbb{P}_{\delta_x}$ . Nous obtenons donc, avec (8) :

$$\mathbb{Q}(v \cdot z \mid \uparrow v) = \mathbb{P}(\uparrow (v \cdot z) \mid \uparrow v) \frac{1}{\mathbb{P}_x(X_{\tau_A} \in B)} = \frac{\mathbb{P}_x(\uparrow z)}{\mathbb{P}_x(X_{\tau_A} \in B)}, \quad (9)$$

et de même, puisque  $v$  et  $v'$  terminent par la même lettre  $x$  :

$$\mathbb{Q}(v' \cdot z \mid \uparrow v') = \frac{\mathbb{P}_x(\uparrow z)}{\mathbb{P}_x(X_{\tau_A} \in B)}. \quad (10)$$

De (9) et (10), nous voyons que les probabilités conditionnelles  $z \mapsto \mathbb{Q}(v \cdot z \mid \uparrow v)$  et  $z \mapsto \mathbb{Q}(v' \cdot z \mid \uparrow v')$  sont donc identiques, dès que  $v$  et  $v'$  se terminent par la même lettre. Ceci montre le caractère markovien et homogène de  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**Un contre-exemple.** Si on ne suppose plus que le temps d'arrêt  $\tau$  est un temps d'atteinte, et qu'on conditionne par rapport à l'événement  $\{X_\tau \in B\}$ , le processus obtenu peut ne plus être markovien. Considérons par exemple  $S = \{0, 1, 2\}$ ,  $A = \{0, 1\}$  et  $B = \{0\}$ , et soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec probabilité uniforme sur  $S$ . Considérons enfin le temps  $\tau$  de *deuxième atteinte* de  $A$ . Alors le processus obtenu en conditionnant le processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  relativement à  $\{X_\tau \in B\}$  n'est pas markovien.

En effet, soit  $Y$  le processus obtenu en arrêtant  $(X_n)_{n \geq 1}$  au temps  $\tau$ , et conditionné par  $\{X_\tau \in B\}$ . Soit les deux mots  $v_1 = 02$  et  $v_2 = 22$ . D'une part, en conditionnant par rapport à  $\uparrow v_1$ , la probabilité d'obtenir 1 comme état suivant est nulle, car sinon le processus ne satisfait pas la contrainte  $\{X_\tau \in B\}$ . Mais d'autre part, en conditionnant par rapport à  $\uparrow v_2$ , la probabilité d'obtenir 1 comme état suivant est strictement positive. Le processus  $Y$  n'est donc pas markovien.

**Vers une généralisation.** Il semble naturel que le résultat élémentaire ci-dessus s'étende en conditionnant le processus sur sa valeur lorsqu'il atteint son bord à l'infini. Si  $X_\infty$  est la projection du processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  sur son bord de Poisson  $(\mathbf{B}, \mu)$  [3], et si le processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  conditionné par rapport à  $\{X_\infty \in B\}$  est bien markovien pour toute partie mesurable  $B$  de  $\mathbf{B}$ , alors puisque  $\mathbf{B}$  est un espace de Lebesgue nous obtenons une décomposition de la probabilité  $\mathbb{P}$  comme une intégrale  $\int_{\mathbf{B}} \mathbb{P}_{\mathbf{x}} d\mu(\mathbf{x})$ , où  $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}$  est la loi d'un processus markovien, correspondant au processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  conditionné par  $\{X_\infty = \mathbf{x}\}$ , et définie pour  $\mu$ -presque tout  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ .

## 5 Perspectives

Le formalisme introduit présente une potentielle généralisation à des processus parallèles, et une telle généralisation a déjà été conduite pour l'étude des réseaux markoviens en [1]. En effet, l'intérêt des formulations alternatives qui sont données ici pour les temps d'arrêt est qu'elles ne font plus apparaître l'indice de temps  $n \in \mathbb{N}$ . Il est donc possible de considérer des temps d'arrêt pour des processus dont l'indice de temps n'est plus totalement ordonné, mais est typiquement un ensemble filtrant ou un treillis. Ce genre de processus se rencontre lorsqu'on étudie des systèmes avec *parallélisme*, comme l'évolution de l'état d'un réseau informatique. Des composantes parallèles peuvent évoluer de manière non synchronisée, d'où une notion naturelle de temps non totalement ordonné. Un travail en préparation porte sur une variante des chaînes de Markov à plusieurs composantes, où l'indice de temps parcourt un treillis. Une formulation de la notion de temps d'arrêt telle que donnée ici devient alors cruciale, car la notion de temps d'arrêt est toujours pertinente, mais la formulation originale de Doob est inopérante.

Il m'a cependant paru intéressant de présenter la notion d'ordre préfixe appliqué aux temps d'arrêt dans le cadre habituel des processus séquentiels tels que les chaînes de Markov, pour souligner l'adéquation de ce formalisme avec les cas classiques.

**Remerciements.** Je remercie chaleureusement Albert Benveniste pour ses remarques et suggestions, toujours très pertinentes.

## Références

- [1] S. Abbes and A. Benveniste. Probabilistic true-concurrency models: Markov nets and a law of large numbers. *Theoretical Computer Science*, 390(2-3):129–170, 2008.
- [2] J.L. Doob. *Stochastic Processes*. John Wiley, 1953.
- [3] V.A. Kaimanovich. Measure-theoretic boundaries of markov chains, 0–2 laws and entropy. In *Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory (Frascati)*, pages 145–180. Plenum, 1991.